Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2007

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1121 DE HONOR— Segundo Parcial—

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Se corregirá sobre 4 ejercicios elegidos por usted.

1. Considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{(x-1)^2}$$

   a) Describa sus intervalos de monotonía.
   b) Examine la concavidad-convexidad y posibles inflexiones.
   c) Halle extremos locales y/o absolutos.
   d) Demuestre que hay funciones

$$l(x) = ax + b \quad \text{y} \quad k(x) = a'x + b'$$

$$\text{tales que} \quad \begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (f(x) - l(x)) &= 0 \\ \lim_{x\to-x} (f(x) - k(x)) &= 0. \end{aligned}$$

   e) Dibuje la gráfica aproximada de f, que refleja las conclusiones de a)-d).

2. Demuestre que

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$$

$$\text{para } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

   Sugerencia: Considere las funciones

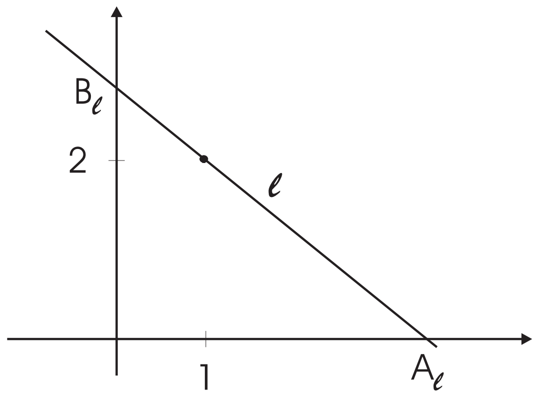
$$\operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi} \quad \text{y} \quad x - \operatorname{sen} x$$

$$\text{y estúdielas para } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{6}\,\pi x^2\right)}{1 - x^2}$

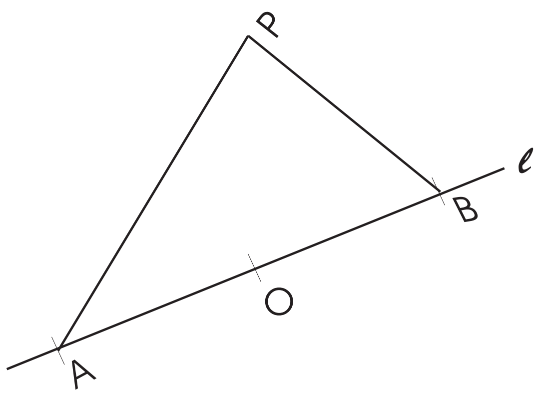
4. Considere para cada recta ℓ de pendiente negativa que pasa por $(1, 2)$, sus intersecciones A_ℓ y B_ℓ con los ejes coordenados.
   Demuestre que hay una recta ℓ_0 tal que la longitud del segmento $\overline{A_\ell B_\ell}$, es mínima. Encuentre la recta ℓ_0 y calcule esta mínima longitud.



5. Suponga que la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y convexa. Entonces, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(x)$ no toma ningún valor negativo.
   Sugerencia: Si toma algún valor negativo, muestre que debe tener un mínimo local y use este resultado.

6. Suponga que u y v son funciones derivables en un intervalo. Suponga además que $uv' - u'v$ no se anula en ningún punto de ese intervalo. Demuestre que que entre dos puntos x_0, x_1 tales que $u(x_0) = 0$ y $u(x_1) = 0$ debe haber una z donde $v(z) = 0$.
   Sugerencia: Piense en la función $\dfrac{u}{v}$ en el intervalo $[x_0, x_1]$

7. Considere la figura



donde O está fijo en la recta ℓ y $d(A, O) = d(O, B)$. Suponemos además que P es fijo y no está sobre ℓ. Demuestre que $d(A, P) + d(B, P)$ crece cuando $d(A, B)$ crece.